Ondas Móveis

1 – Introdução

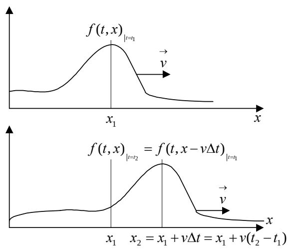
1.1 – Conceito de onda móvel

Uma função $f(t,x)$ descreve o perfil de variação de uma onda móvel (velocidade v) no espaço x e no tempo t.

Para que o perfil de variação $f(t,x)$ caracterize uma onda móvel, deve satisfazer a equação de onda seguinte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Em termos gráficos tem-se uma função de duas variáveis e um gráfico tridimensional. Para simplificar a representação, fixa-se ou t ou x.



$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Ondas Móveis

A equação de ondas admite como solução, para o perfil de onda a solução $f(t,x)=g_1(t,x)+g_2(t,x)=g_1(x-vt)+g_2(x+vt)$, em que:

(1) - $g_1(x-vt)$ é a onda directa (no sentido positivo do eixo dos xx) pois à medida que o tempo decorre (t aumenta), x também tem de aumentar para que $x-vt$ seja zero.

(2) - $g_2(x+vt)$ é a onda inversa (no sentido negativo do eixo dos xx) pois à medida que o tempo decorre (t aumenta), x tem de diminuir para que $x-vt$ seja zero.

1.2 – Onda plana monocromática (OPM)

Só tem uma frequência e a frente de onda é plana (num plano perpendicular ao eixo dos xx $f(t,x)$ tem sempre o mesmo valor, para um instante de tempo t fixo).

São ondas cujo perfil de onda é dado genericamente por

$$f(t,x) = \sqrt{2} A_0 \cos(\omega t \pm \beta x \pm \phi)$$

Ondas Móveis

Onde

(1) - A_0 é amplitude da OPM;
(2) - ω é a frequência angular em rad/s e está relacionada com o tempo t;
(3) - β é a constante de fase em rad/m e está relacionada com o espaço x;
(4) - ϕ é a fase inicial da OPM em radianos.

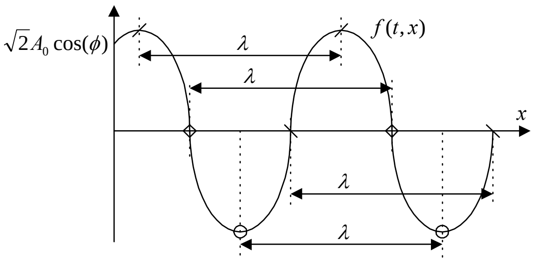
O perfil de variação de uma OPM é sinusoidal.

A velocidade de propagação v de uma OPM é

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda\, f$$

em que λ é o comprimento de onda em metros.

Foto para t=0 seg



Ondas Móveis

2 – Ondas electromagnéticas

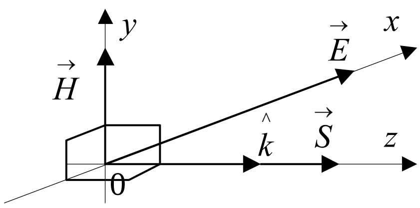
2.1 – Ondas electromagnéticas tipo OPM (agora é a 3D e o *z* vai substituir o *x*)

Uma onda electromagnética contém as componentes vectoriais

(1) - campo eléctrico $\vec{E}$;
(2) - campo magnético $\vec{H}$.

Tanto $\vec{E}$ como $\vec{H}$ são perpendiculares entre si e são ambos perpendiculares à direcção de propagação, que contém o vector $\vec{S}$ dado pelo **produto vectorial** $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $(-\vec{H} \times \vec{E})$.

$\vec{s}$ chama-se vector de Poynting e "aponta" no sentido de propagação da OPM ($\vec{S} = S\,\hat{k}$) → $\vec{v} = v\hat{k}$, *paralelo a* $\vec{S}$.



Ondas Móveis

Se o campo eléctrico for $\vec{E} = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t \pm \beta z \pm \phi)\hat{i}$,
então o campo magnético é $\vec{H} = \sqrt{2} H_0 \cos(\omega t \pm \beta z \pm \phi)\hat{j}$.

2.2 - Fasores

Vai somente considerar-se o campo eléctrico.

Ao campo real $\vec{E} = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t \pm \beta z \pm \phi)\hat{i}$,
corresponde o fasor $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\pm \beta z \pm \phi)}\hat{i}$.

2.3 – Polarização de ondas electromagnéticas

É utilizado o vector campo eléctrico para caracterizar a polarização de ondas EM.

Ondas Móveis

Explica o facto de se ter de utilizar antenas “deitadas” (apontadas na horizontal), e “em pé” (apontadas na vertical).

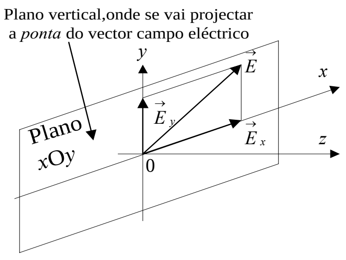
O campo eléctrico já pode ter componentes vectoriais segundo o eixo dos *yy* além do eixo dos *xx*.

Se, $\vec{E} = \sqrt{2} E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{i} + \sqrt{2} E_y \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_y)\hat{j}$

então,

$$\underline{\vec{E}} = E_x e^{j(\pm \beta z + \phi_x)}\hat{i} + E_y e^{j(\pm \beta z + \phi_y)}\hat{j} =$$

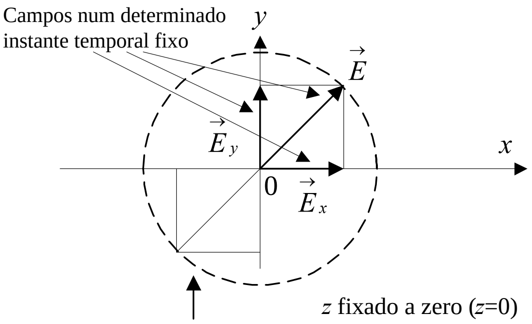
$$= \underline{q} \times \left(\hat{i} + A e^{j\phi}\hat{j}\right) \times e^{\pm j \beta z}, \text{ com } \begin{cases} A = E_y / E_x \\ \phi = \phi_y - \phi_x \\ \underline{q} = E_x e^{\pm j \phi x} \end{cases}$$



Ondas Móveis

Fixa-se uma posição, $z = 0$, e projecta-se o vector campo eléctrico total durante todos os instantes, no plano xy.
e vai-se ver que padrão ele descreveu nesse plano.

O padrão descrito define o tipo de polarização.



z fixado a zero (*z*=0)
Ex. de padrão descrito pela *ponta* do vector campo eléctrico para todos os *t*

Filipe Santos Moreira - Ondas (2EE) 7

Ondas Móveis

2.3.1 – Polarização linear segundo o eixo dos *xx*

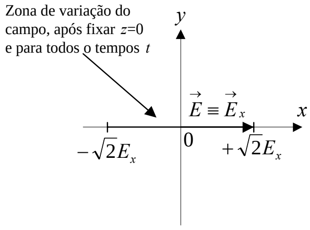
Tome-se $A = 0$, ou seja, $E_y = 0$, reduzindo-se o campo real a

$$\vec{E} = \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{i}\ .$$

Facilmente se constata que o campo apresenta componente vectorial segundo os *xx*.

O campo fasorial é $\underline{\vec{E}} = \underline{q}\, e^{\pm j\beta z}\hat{i}$

A polarização diz-se linear, porque o padrão descrito pelo vector campo eléctrico é uma recta.



Filipe Santos Moreira - Ondas (2EE) 8

Ondas Móveis

2.3.2 – Polarização linear com ângulo de 45º com o eixo dos *xx*

Nesta situação $A = 1$ e $\phi = \phi_y - \phi_x = 0º$, sendo o campo real dado por

$$\vec{E} = \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{i} + \sqrt{2}E_y \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_y)\hat{j}\ .$$

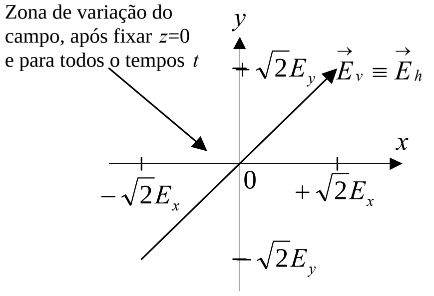
As componentes segundo os *xx* e os *yy*, são iguais. O padrão é uma recta, mas fazendo um ângulo de 45º com os *xx*.

O campo fasorial é

$$\underline{\vec{E}} = \underline{q} \times \left(\hat{i} + \hat{j}\right) \times e^{\pm j\beta z}$$

Este vector também explica os 45º.

$$\arg\left(\vec{E}\right) = \text{arctg}(1) = 45º$$



Filipe Santos Moreira - Ondas (2EE) 9

Ondas Móveis

2.3.3 – Polarização circular à esquerda

Nesta situação $A = 1$ e $\phi = -90º$.

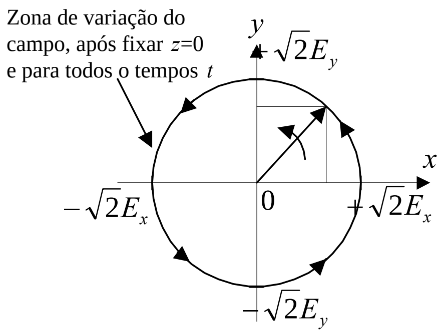
$$\vec{E} = \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{i} + \sqrt{2}E_y \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_y - \tfrac{\pi}{2})\hat{j} =$$

$$= \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{i} + \sqrt{2}E_y sen(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\hat{j}$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{q} \times \left(\hat{i} + e^{-j\frac{\pi}{2}}\hat{j}\right) \times e^{\pm j\beta z}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{2}E_x = \sqrt{2}E_y$$

$$\arg(\vec{E}) = \omega t + \phi_x = \omega t + \phi_y + \pi/2$$



2.3.4 – Polarização circular à direita

Filipe Santos Moreira - Ondas (2EE) 10

Ondas Móveis

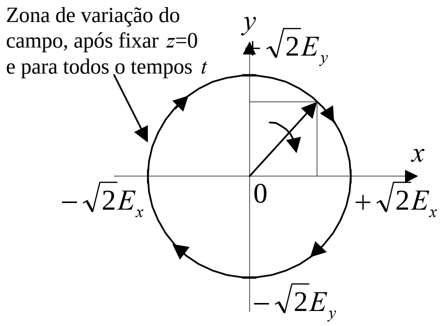
Nesta situação A = 1 e ϕ = +90º.

$$\vec{E} = \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{i} + \sqrt{2}E_y \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_y + \tfrac{\pi}{2})\,\hat{j} =$$
$$= \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{i} - \sqrt{2}E_y sen(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{j}$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{q} \times \left(\hat{i} + e^{+j\frac{\pi}{2}}\,\hat{j} \right) \times e^{\pm j\beta z}$$

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{2}E_x = \sqrt{2}E_y$$

$$\arg(\vec{E}) = -\omega t - \phi_x =$$
$$= -\omega t - \phi_y - \pi/2$$



Ondas Móveis

2.3.5 – Polarização elíptica à esquerda

A polarização circular é um caso especial da elíptica, em que $A = E_y / E_x = 1$.
Tome-se o caso A = 2 e ϕ = -90º:

Campo real: $$\vec{E} = \sqrt{2}E_x \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{i} + \sqrt{2}E_y \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_y - \tfrac{\pi}{2})\,\hat{j} =$$
$$= \sqrt{2}E_0 \cos(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{i} + 2\sqrt{2}E_0 sen(\omega t \pm \beta z + \phi_x)\,\hat{j}$$

Campo fasorial: $$\underline{\vec{E}} = \underline{q} \times \left(\hat{i} + 2e^{+j\frac{\pi}{2}}\,\hat{j} \right) \times e^{\pm j\beta z}$$

Módulo do vector campo eléctrico (eq. elipse):

$$\left|\vec{E}(t,z)\right| = \sqrt{E_x^2(t,z) + E_y^2(t,z)}$$
$$= \sqrt{2E_0^2 \cos^2(\omega t - \beta z) + 4 \times 2E_0^2 sen^2(\omega t - \beta z)}$$
$$= \sqrt{2}E_0 \sqrt{1 + 3sen^2(\omega t - \beta z)}$$