1 Análise vectorial

1.1 Derivadas parciais

1.1.1 Derivada de uma função

Seja a função $f = y(x)$ uma função qualquer com uma variável independente. A derivada de uma função é

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geometricamente, a derivada de uma função num ponto é a tangente trigonométrica do ângulo que a recta tangente à curva nesse ponto faz com o eixo das abcissas.

As derivadas calculam-se de acordo com a definição.

Exemplo:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{X \to x} \frac{Y - y}{X - x} = \lim_{X \to x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{X - x} = \lim_{X \to x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{X}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{X \to x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{X} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{X} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{X \to x} \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

É possível, assim, com mais ou menos trabalho, estabelecer regras práticas de derivação e tabelas de derivadas.

1.1.2 Derivadas parciais

Uma função a uma variável representa uma linha; uma função a duas variáveis representa uma superfície; uma função a *n* variáveis representará uma hipersuperfície no espaço *n+1* dimensional.

Define-se derivada parcial da função *z(x,y)* no ponto P do espaço em ordem a *x*, $\frac{\partial z}{\partial x}$, à derivada da função *z(x)* que se obtém "congelando" *y*, isto é, supondo *y* constante. Da mesma forma se pode definir $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Calculemos as derivadas parciais da função $z = xy^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \qquad (y^2 \text{ funciona como uma constante})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \qquad (x \text{ funciona como uma constante})$$

1.1.3 Derivadas de funções compostas

As seguintes regras da derivação de funções compostas são fundamentais:

i. *z = z(y(x))*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ii. *z = z(y1(x), y2(x))*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

iii. *z = z(y1(x, t), y2(x,t))*

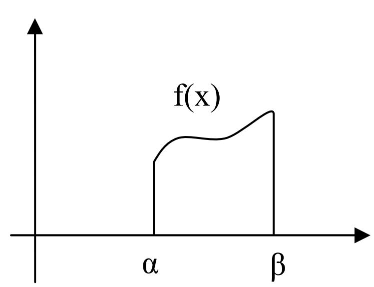
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dt}$$

1.2 Integrais múltiplos

1.2.1 Integração de uma função

Considere-se a seguinte função:



Divida-se o intervalo entre α e β em intervalos parcelares arbitrários Δx_i; de seguida tome-se em cada um desses intervalos um ponto arbitrário p_i e determine-se aí o valor da função $f(p_i)$.

Define-se, então

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

que é independente da forma da divisão em intervalos e dos pontos p_i escolhidos. Este integral definido (um valor definido, um número) é a área entre a curva f(x) e o eixo das abcissas.

Conclui-se, de imediato, que se **m** for um mínimo de f(x) no intervalo {α, β} e **M** um máximo da função nesse mesmo intervalo, então

$$m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$$

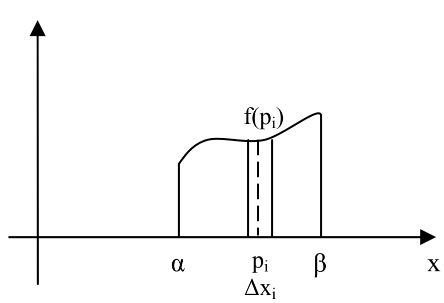
que é conhecido como o teorema do valor médio para integrais definidos.

Partindo deste teorema, é possível chegar à definição de primitiva ou integral indefinido de f(x); de facto, a primitiva de f(x), F(x), é toda a função que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

1.2.2 Integrais duplos

Quando se introduziu o integral definido, dividiu-se a área sob a curva f(x) em pequenos rectângulos.



Primeiro calculou-se a área desses pequenos rectângulos

$$\sum_i f(p_i)\Delta x_i$$

e só depois é que se passou ao limite de modo a obter o integral definido

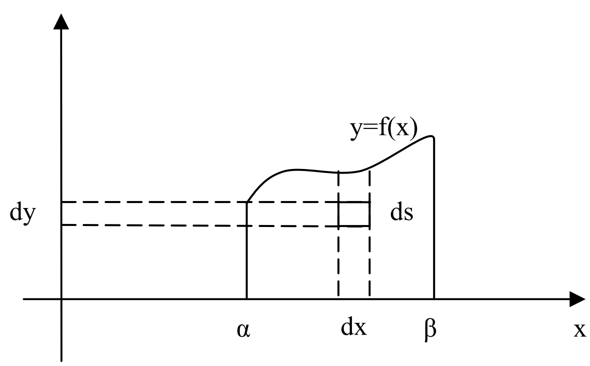
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i)\to 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

O integral definido pode ser interpretado como o limite dessa soma. O sinal $\int_{\alpha}^{\beta}$ pode ser entendido como um sinal limite do sinal Σ e o integrando f(x)dx pode ser visto como uma área infinitesimal rectangular.

O processo de cálculo dessa área reduz-se, assim, ao de definir uma área infinitesimal a integrar.

Poder-se-ia ter escolhido um elemento de área ainda mais pequeno. O mais pequeno elemento de área que se pode definir é o chamado elemento de área em coordenadas cartesianas

$$ds = dx\, dy$$



Agora para calcular a área total sob a curva, calcula-se primeiro a área correspondente ao rectângulo do primeiro processo. Nesse cálculo, *x* é tomado constante.

$$\int_0^{f(x)} dydx = f(x)dx$$

Depois segue-se o primeiro processo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Este procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{f(x)} dydx$$

o que constitui um integral duplo.

O seu cálculo segue o processo inverso do da derivação parcial. Primeiro, integra-se em ordem a *dy*, considerando *x* como uma constante; depois, integra-se em ordem a *dx*, considerando *y* como uma constante.

Neste exemplo, a utilidade do integral duplo não é muito aparente, uma vez que se pode calcular a área muito mais facilmente utilizando o integral simples. Contudo, imagine-se que se pretende calcular, por exemplo, o volume sob uma superfície – entre o plano *xy* e a superfície *z (x,y)*.

Pode tomar-se como elemento de área *ds* = *dx·dy* no plano *xy* e depois associar a esse elemento de área uma altura z = z (x,y), definido um volume infinitesimal prismático.
O volume total será dado por

$$\iint z(x,y)dxdy$$

Imagine-se, por exemplo, que se quer o volume sob a superfície $z = x \cdot y^2$ entre os limites x=1 e x=2 para a coordenada x e y=0 e y=2 para a coordenada y. O volume é, então

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{2} xy^2 dydx$$

Primeiro integra-se em ordem a y, considerando x constante e depois integra-se em ordem a x. Assim sendo, vem

$$V = \int_{1}^{2} x \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_{1}^{2} x \cdot \frac{8}{3} dx = \int_{1}^{2} \frac{8}{3} x\, dx = \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 4$$

A ordem de integração, neste exemplo, é arbitrária, porque os limites são constantes puras.

1.2.3 Integrais triplos

No exemplo anterior, poder-se-ia ter calculado o mesmo volume usando um elemento de volume ainda menor: o elemento de volume em coordenadas cartesianas

$$dV = dx\ dy\ dz$$

O volume seria, então, dado por

$$\int_1^2\int_0^2\int_0^{xy^2} dz\ dy\ dx = \int_1^2\int_0^2 xy^2 dy\ dx$$

Aqui, a ordem já não é arbitrária, pois o limite superior de integração em z depende de x e y.

Mais uma vez, parece desnecessário recorrer ao integral triplo. Mas imagine-se outro problema: pretende-se determinar a massa de um prisma, sabendo que a sua massa específica é uma função do ponto dada por

$$\rho = e^{xy} \cdot yz$$

O prisma tem por limites

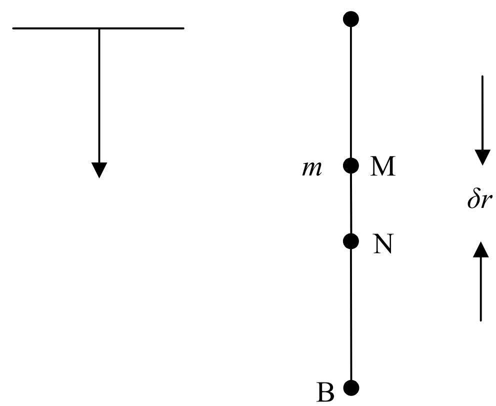
$$1 < x < 2$$
$$0 < y < 2$$
$$0 < z < 4$$

O problema pode ser resolvido por

$$M = \int_0^4\int_0^2\int_1^2 \left(e^{xy} \cdot yz\right) dx\ dy\ dz = \int_0^4\int_0^2 yz \cdot \left[\frac{e^{xy}}{y}\right]_1^2 dy\ dz = \int_0^4\int_0^2 z \cdot \left(e^{2y} - e^{y}\right) dy\ dz = \int_0^4 z \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2} - e^{y}\right]_0^2 dz =$$
$$\int_0^4 z \cdot 18{,}55\ dz = 18{,}55 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = 148{,}41$$

1.2.4 Integral de linha

Considere-se um objecto com massa m colocado num campo gravítico. Como a força gravítica é um vector, o campo gravítico é um exemplo de um campo vectorial. A força gravítica na massa é dada por $m\mathbf{g}$, em que $\mathbf{g}$ é um vector constante chamado aceleração gravítica. Supondo que se larga a massa e ela cai a partir do ponto A. O deslocamento vertical medido na direcção descendente a partir de A é r. O trabalho feito pela força gravítica causa o deslocamento da massa. Pretende-se calcular o trabalho feito para mover a massa de A até B, como na figura.



O trabalho feito para deslocar a massa do ponto *M* para o ponto *N*, correspondente a uma distância elementar δr. A física diz que o trabalho feito é igual ao produto da amplitude da força pela distância percorrida. Neste caso, a amplitude da força presente é dado por mg e a quantidade elementar δW, quando a massa se desloca de *M* para *N* é dada por

$$\delta W = m \cdot g \delta r$$

donde se tira $\dfrac{\delta W}{\delta r} = m \cdot g$. Fazendo $\delta r \to 0$, obtém-se

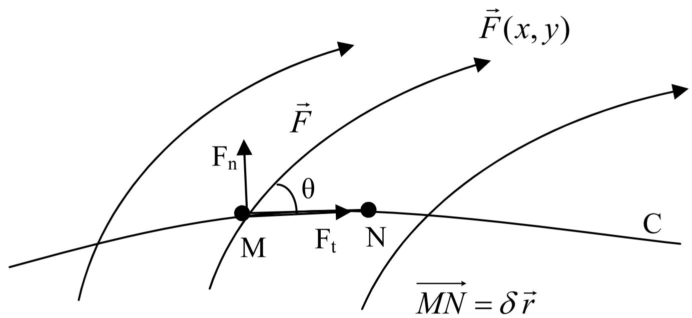
$$\lim_{\delta r \to 0} \frac{\delta W}{\delta r} = \frac{dW}{dr} = m \cdot g$$

Para se obter o trabalho total feito quando a massa se desloca de *A* para *B*, calcula-se o integral para o intervalo de interesse, isto é

$$\text{trabalho total feito} = W = \int_A^B m \cdot g \, dr \, .$$

Este é exemplo elementar de um integral de linha. Esta denominação vem do facto de se estar a integrar ao longo da linha de *A* até *B*.

No caso anterior, o cálculo foi directo e simples, devido à particularidade do exemplo. Considere-se agora o caso em que se tem um campo vectorial, $\vec{F}$, através do qual passa uma curva C, como na figura seguinte.



A análise seguinte vai se restringir a duas dimensões. No caso geral, o campo vectorial vai variar com o espaço, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$. Considere-se que o elemento pequeno de C e que junta os pontos M e N e seja θ o ângulo entre a tangente da curva C no ponto M e a direcção do campo nesse ponto. Seja o vector que une M e N $\delta\vec{r}$. Considerando a quantidade

$$\vec{F} \mid \delta\,\vec{r}$$

em que | representa o produto escalar. Se $\vec{F}$ representar a força gravítica, então a quantidade $\vec{F} \mid \delta\,\vec{r}$ representa a pequena quantidade de trabalho feito pelo campo ao mover uma partícula de massa unitária entre o ponto M e o ponto N. O integral apropriado ao longo de toda a curva representa o trabalho total efectuado. Assim, tem-se

$$\vec{F} \mid \delta\,\vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\delta\,\vec{r}\right| \cdot \cos\,\theta = \left(\left|\vec{F}\right| \cdot \cos\,\theta\right) \cdot \left|\delta\,\vec{r}\right| = F_t \cdot \delta\,r$$

em que F_t é a componente de $\vec{F}$ tangencial à curva C. Este resultado é do mesmo tipo das expressões para o trabalho obtido anteriormente. Então está-se interessado em integrais do tipo

$$\int_C \vec{F}\,(x,y) \mid d\,\vec{r}\ .$$

Dado que $\vec{F}$ é uma função vectorial de x e de y, então $\vec{F}$ terá componentes cartesianas $F_x(x,y)$ e $F_y(x,y)$, pelo que pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x,y) = F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}\ .$$

De igual modo, pode definir-se

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

donde se tira

$$\int_C \vec{F} \mid d\vec{s} = \int_C \left(F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}\right) \mid \left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = \int_C F_x(x,y)\cdot dx + F_y(x,y)dy\ .$$

1.3 Fasores

A solução complexa

$$x = A\cdot e^{j(\omega t+\delta)}$$

pode ser decomposta em dois factores

$$x = A\cdot e^{j\delta}\cdot e^{j\omega t}$$

Se se tiver a garantia de que se trabalha com uma única frequência ω, constante e igual para várias soluções, faz sentido representar a solução apenas pelo primeiro factor.

Quando tal sucede, representa-se a solução por um **fasor**:

$$\underline{x} = A\cdot e^{j\delta}$$

Para se obter a solução sinusoidal – a que tem significado na realidade – tem de se ter em mente que o fasor é suposto rodar com uma velocidade angular ω. Então, se se pretender o valor da solução sinusoidal no instante t, tem de se rodar o fasor de um ângulo $\omega\, t$ e achar a parte real do número complexo correspondente.

2 Ondas

2.1 Movimentos harmónicos

2.1.1 Movimento harmónico simples

Um movimento vibratório é o que se verifica quando uma partícula se move, periodicamente, em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: o movimento de um pêndulo, uma massa amarrada à extremidade de uma mola depois de libertada, átomos num sólido e mesmo os electrões numa antena, emissora ou receptora, executam rápidas transições.
De todos os movimentos vibratórios, o mais importante é o movimento harmónico simples – MHS –, pois não só é o mais fácil de se descrever matematicamente, como constitui uma descrição bastante precisa de muitas vibrações que se encontram na Natureza.

Por definição, uma partícula executa um MHS ao longo do eixo dos *xx* quando o seu deslocamento ao longo do eixo, x, e relativamente à origem do sistema de coordenadas é dado, com função do tempo, pela relação

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \alpha)$$

em que $\omega\, t + \alpha$ é denominada fase e α é a fase inicial (valor da fase para o instante $t = 0$). A função co-seno, em vez da função seno, também serviria para descrever o MHS, sendo que a única diferença residiria numa diferença de fase de $\pi/2$ radianos (o que seria "contornado" diferindo a fase inicial precisamente de $\pi/2$ radianos). A representa o deslocamento simples relativamente à origem e denomina-se amplitude do MHS. Como a função seno se repete de 2π em 2π radianos, então o deslocamento da partícula repete-se a cada $2\pi/\omega$ segundos, o que quer dizer que o MHS é periódico e o seu período, T, vale $2\pi/\omega$ segundos. A frequência, f, de um MHS é igual ao número de vibrações completas por unidade de tempo, isto é $f = 1/T$. Por último, refira-se que ω é a frequência angular da partícula em vibração e relaciona-se com a frequência através da relação

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

A velocidade da partícula, v, é dada por

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

e a aceleração, a, é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

Esta relação indica que, num MHS, a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento da partícula.

2.1.1.1 Força e energia no MHS

A força aplicada a uma partícula é dada pela relação $F = m \cdot a$; para se obter um MHS essa força deve ser

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x = -k \cdot x$$

em que $k = m \cdot \omega^2$. Isto indica que, num MHS, a força é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento, o que significa que a força aponta sempre para a origem. De facto, essa é a posição de equilíbrio, pois, na origem, $F = 0$ (pois $x = 0$). A força definida anteriormente é a que aparece quando se deforma um corpo elástico, como, por exemplo, uma mola. A constante $k = m \cdot \omega^2$ é, às vezes, chamada de constante elástica e representa a força necessária para deslocar a partícula de uma distância unitária. Também se pode escrever

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

e

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A energia cinética da partícula é dada por

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Como $\cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2(\theta)$, pode escrever a relação anterior da seguinte forma:

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \left[1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha)\right] = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2)$$

donde se conclui que a energia cinética é máxima no centro (para $x = 0$) e é nula nos extremos da vibração (para $x = \pm A$).

A energia potencial da partícula é dada por

$$F = -\frac{dE_P}{dx}$$

donde se pode escrever

$$\frac{dE_P}{dx} = k \cdot x$$

Integrando, e considerando $E_P = 0$ na origem ($x = 0$), vem

$$E_P = \int_0^{E_P} dE_P = \int_0^x (k \cdot x) dx = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

donde se conclui que a energia potencial é nula na origem ($x = 0$) e máxima nos extremos de vibração ($x = \pm A$).

Por último, a energia total vem

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 =$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

2.1.2 Dinâmica do MHS

A equação do movimento diz que $F = m \cdot a$. No movimento rectilíneo, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, pelo que se pode escrever

$$-k \cdot x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

ou ainda

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

Fazendo $\omega^2 = k / m$, vem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m \cdot \omega^2 \cdot x = 0$$

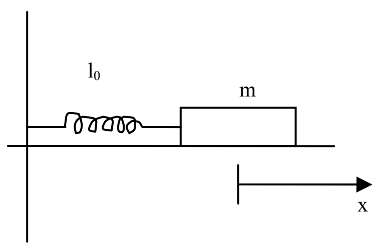
ou, simplificando,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial cujas soluções são funções sinusoidais com argumento $\omega\ t$. Substituindo x por A·sen $(\omega\ t+\alpha)$ pode verificar-se que essa expressão, para x, que corresponde ao MHS, satisfaz esta última equação, pelo que se que $x = A \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t + \alpha)$ é uma solução geral dessa equação, pois tem duas constantes arbitrárias: A e α. Assim, verifica-se que uma força de atracção proporcional ao deslocamento produz um MHS.

2.1.3 Movimento de uma mola presa numa das extremidades

Considere-se uma mola que liga horizontalmente uma massa ***m*** a uma parede, tudo assente numa mesa sem atrito como mostra a figura.



A mola tem comprimento livre $\boldsymbol{l_0}$ e uma constante de rigidez ***k***. Marque-se um eixo dos *xx* com origem na posição da massa quando a mola está com o seu comprimento igual ao comprimento livre, isto é, em repouso.

Quando a mola é esticada ou comprimida para um comprimento ***l***, reage com uma força dada por

$$F = -k \cdot (l - l_0) = -k \cdot x$$

O sentido da marcação da força é o sentido positivo do eixo dos *xx*. Isso significa que, quando o x é positivo, a força é negativa, isto é, quando a mola é estendida, a força com que a mola reage é negativa, tentando repor o comprimento livre. Da mesma forma, se x é negativo, a força é positiva, isto é, quando a mola é comprimida reage com uma força que tenta repor o comprimento livre, contrariando a compressão.

O movimento da massa é regido pela equação de Newton

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Substituindo a força, vem

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Trata-se de uma equação diferencial, cuja integração introduz duas constantes, uma vez que a equação é do 2º grau (envolve a segunda derivada em ordem a *t*).

Se a equação for escrita na forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

vê-se que a solução *x(t)* é qualquer função tal que a segunda derivada em ordem ao tempo seja proporcional ao negativo da própria função.

Uma solução é formada pela sinusóide

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

De facto

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \text{sen}\left(\omega t + \delta\right)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \left[A\cos(\omega t + \delta)\right]$$

Comparando com a equação do movimento da mola

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

vê-se que são soluções da equação, as sinusóides tais que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução é, assim

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \delta\right)$$

Repare-se que não foi colocada qualquer restrição à amplitude da sinusóide ***A*** nem à fase inicial ($t=0\ s$), δ; estas são, aqui, as duas constantes que a equação do 2º grau implica.

A solução é uma família de funções parametrizadas pelas duas constantes.

O movimento particular depende das condições iniciais do movimento, a partir das quais se determinam as constantes. Suponha-se que o movimento é inicializado esticando a mola para uma posição x_0 e que é imprimida uma velocidade inicial v_0. Esses vão ser os valores de x e para $t=0\ s$, isto é, sabendo que

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t + \delta)$$

com $t=0\ s$, vem

$$x_0 = A\cos\delta$$

$$v_0 = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \mathrm{sen}\,\delta$$

Dividindo estas duas equações, uma pela outra, vem

$$\frac{v_0}{x_0} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot tg\delta$$

ou

$$\delta = arctg\left(-\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{v_0}{x_0}\right)$$

Por outro lado, reescrevendo as equações na forma

$$\frac{x_0}{A} = \cos\delta$$

$$\frac{v_0}{A} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \text{sen}\,\delta$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e somando-as, chega-se, finalmente, à seguinte equação

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{m}{k} \cdot {v_0}^2}\ .$$

Viu-se assim que uma equação do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

tem por solução

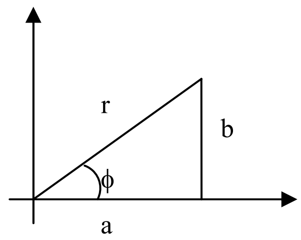
$$x = A\cos(\omega\, t + \delta)$$

em que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{\delta}$ são determinados a partir das condições iniciais.

2.1.4 Solução complexa

Um número complexo identifica um ponto num plano em que o eixo das abcissas é o eixo dos números reais e o eixo das ordenadas é o eixo dos números imaginários. A unidade do eixo real é ***1*** e a unidade do eixo imaginário é ***j***.

Repare-se que se pode pensar no número complexo como a soma de dois comprimentos: ***a***, medida no eixo real, e ***b***, medida na perpendicular, isto é, no eixo imaginário. Sendo assim, multiplicar por j significa rodar o segmento de 90º.



É imediato do teorema de Pitágoras que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e da definição de tangente

$$tg\phi = \frac{b}{a}$$

Também se pode escrever ***a*** e ***b*** em função de ***r*** e ϕ:

$$a = r\cos\phi$$
$$b = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Daqui resulta outra maneira de escrever o número complexo:

$$c = r\cos\phi + j \cdot r\,\mathrm{sen}\,\phi = r(\cos\phi + j\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Sabendo que

$$\cos\phi + j\,\mathrm{sen}\,\phi = e^{j\phi}$$

pode escrever-se um número complexo da seguinte forma

$$c = r\,e^{j\phi}$$

Esta notação permite entender um número complexo do seguinte modo: para marcar o ponto a que corresponde, toma-se um comprimento ***r*** segundo o eixo real e roda-se um ângulo ϕ. Multiplicar por $e^{j\phi}$ significa rodar a partir do eixo dos *xx* de um ângulo ϕ.

A equação do movimento harmónico admite como solução famílias de funções de variável complexa do tipo

$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

Esta solução não tem significado real, mas é fácil extrair a solução que tem significado real a partir desta. A solução complexa é do tipo

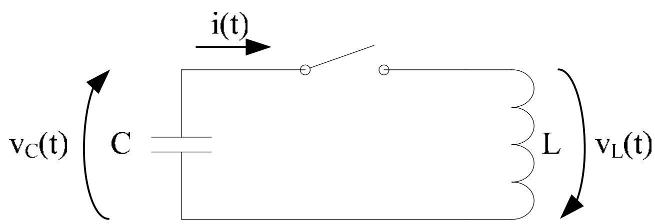
$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)} = A\cos(\omega\, t + \delta) + j \cdot A \,\mathrm{sen}\,(\omega\, t + \delta)$$

Portanto, a solução com significado real é a parte real da solução complexa, por outras palavras a solução real é a que existe no "mundo real".

Importa salientar que, se houver necessidade de efectuar operações matemáticas sobre a solução real do tipo sinusoidal, é possível efectuar as operações sobre a solução complexa e extrair depois a parte real, o que facilita muito os cálculos em inúmeras situações.

2.1.5 Circuito LC

Considere-se o caso do circuito LC, representado na figura seguinte:



Considere-se a situação de se ter o condensador inicialmente carregado e o interruptor aberto. Após o fecho do interruptor, o condensador começa a descarregar fazendo que circule uma corrente eléctrica pelo circuito, corrente esta que irá aumentar até o condensador estar completamente descarregado. Enquanto o condensador descarrega assiste-se à transferência de energia do condensador para a indutância. Após estar completamente descarregado, o condensador irá carregar-se no sentido oposto (há uma transferência de energia de volta para o condensador) até atingir um máximo. De seguida, volta a descarregar, voltando ao ciclo inicial e repetindo-o indefinidamente.

Aplicando as leis de Kirchhoff, tem-se que

$$v_L(t) + v_C(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Como $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$, tem-se

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}=0$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem com a solução possível

$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

e

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}$$ (frequência de ressonância do circuito LC).

Estes resultados permitem fazer a seguinte analogia com o caso do movimento de uma mola presa numa das extremidades:

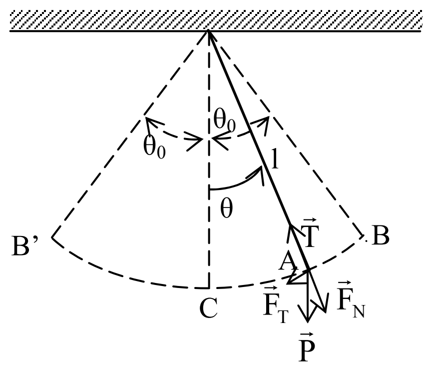
Mola Mecânica	Circuito LC
Posição: x	Carga: q
Velocidade: v	Corrente:
Energia cinética: $\frac{1}{2}m\cdot v^2$	Energia na indutância: $\frac{1}{2}L\cdot i^2$
Energia potencial: $\frac{1}{2}k\cdot v^2$	Energia no condensador: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right)\cdot q^2$
Expressão do movimento: $m\frac{d^2x}{dt^2}+k\cdot x=0$	Equação do circuito: $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$
Frequência de oscilação: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$	Frequência de ressonância: $\omega=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}$

Desta tabela tiram-se, ainda, as seguintes "equivalências" entre os dois casos:

$m \leftrightarrow L$
$k \leftrightarrow 1/C$
$x \leftrightarrow q$
$v \leftrightarrow i$.

2.1.6 Movimento de um pêndulo simples

Outro exemplo de um movimento harmónico simples é o movimento de um pêndulo, como referido anteriormente. Um pêndulo simples define-se como sendo uma partícula de massa m presa a um ponto O por fio de comprimento l e massa desprezável. Afastando a partícula até uma posição B, onde o fio faz um ângulo θ_0 com a vertical, OC, e abandonando a partícula de seguida, então o pêndulo irá oscilar entre a posição B e a sua simétrica, B', como mostra a figura seguinte:



A partícula move-se ao longo de um arco com raio l = OA. As forças que actuam na partícula são o peso, $\vec{P}$, e a tensão no fio, $\vec{T}$. Como o fio tem comprimento fixo, é fácil de deduzir que a componente normal do peso é anulada, a cada instante, pela tensão no fio. A componente tangencial resultante é dada por

$$F_T = -\, m \cdot g \text{ sen } (\theta)$$

em que o sinal negativo se deve ao facto de ter o sentido oposto ao do deslocamento. Sabe-se que $F_T = m \cdot a_T$ e como a partícula move-se ao longo do círculo com raio l – o que corresponde a um movimento circular – tem-se que

$$a_T = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

pelo que se obtém,

$$m \cdot l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \text{sen}\,(\theta)$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \text{sen}\,(\theta) = 0$$

Se o ângulo for muito pequeno, o que sucede para pequenas oscilações, então sen (θ) ≈ θ, pelo que a equação anterior fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

que é idêntica à equação do movimento harmónico simples, em que o deslocamento, x, foi substituído pelo ângulo, θ, pelo que, desta vez, se refere a um movimento angular em vez de um movimento linear. Assim, pode dizer-se que o movimento de um pêndulo simples é um MHS com $\omega^2 = g / l$, pelo que se pode exprimir o ângulo, θ, como

$$\theta = \theta_0 \cdot \text{sen}\ (\omega\, t + \alpha).$$

Também aqui se tem a relação

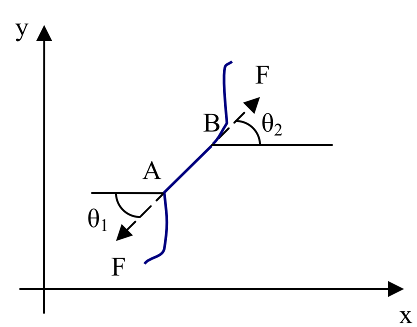
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

pelo que se pode afirmar que o período de oscilação de um pêndulo simples não depende da sua massa.

2.2 Corda em vibração e equação de onda

Suponha-se uma corda que pode ter movimentos transversais num único plano de pequena amplitude. Vai supor-se que qualquer movimento só pode decorrer transversalmente ao comprimento da corda em repouso. A corda está submetida a força de tracção ***F***.

Analise-se o que se passa com um comprimento de corda Δx.



A força que as partes da corda não representadas exercem, à esquerda e à direita do troço que está a ser analisado, só pode ser tangente ao troço, porque uma corda flexível como a considerada só transmite força de tracção – a força de tracção ***F***.

Assim sendo, a força que actua segundo y, direcção única do movimento possível é, da figura

$$F_y = F\ \text{sen}\ \theta_2 - F\ \text{sen}\ \theta_1$$

Se os ângulos θ_1 e θ_2 forem garantidamente pequenos, o seno toma valores próximos da tangente e pode escrever-se

$$F_y = F(tg\theta_1 - tg\theta_2)$$

Por definição de derivada, a tangente do ângulo feito pela tangente à curva *y(x)* com o eixo dos *xx* é a derivada da função *y(x)* no ponto. Desse modo

$$F_y = F\left(\partial\frac{\partial y}{d\,x}\Big|_B - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_A\right)$$

As derivadas são parciais porque *y* é função de *x* e do tempo *t*. Então, se μ for a massa por unidade de comprimento da corda, a equação de Newton para o movimento segundo *y* é

$$F_y = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Substituindo, fica

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_B - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_A\right) = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_B - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_A\right)}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Fazendo Δx tender para zero, obtém-se, por definição de derivada,

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que se pode escrever na forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Esta é uma equação às derivadas parciais. A solução já não é uma simples família de funções parametrizada por constantes; é toda a classe de funções

$$y = \xi(x \pm vt)$$

formada por todas as funções cujo argumento é $x \pm vt$, com $v > 0$.

Para a demonstração desta afirmação, considere-se o caso do argumento $\alpha = x + vt$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

Substituindo na equação, resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} - \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = 0$$

O que é verdadeiro se

$$v^2 = F / \mu$$

Para o argumento $x - vt$, obtém-se o mesmo resultado.

As funções do tipo

$$y = \xi(x \pm vt)$$

chamam-se funções de onda ou ondas. O movimento da corda é um movimento em que são propagadas ondas.

Procure-se saber quando é que a função tem o mesmo valor; isso acontece em dois pontos definidos por x_1 e x_2 em instantes t_1 e t_2. Por exemplo, para o caso $x + vt$,

$$x_1 + vt_1 = x_2 + vt_2$$

ou

$$v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}.$$

A função, que tinha um certo valor no instante t_1 no ponto x_1, tem o mesmo valor no instante t_2 no ponto x_2. Tudo se passa como se esse valor tivesse viajado de x_1 para x_2 no intervalo de tempo de t_1 para t_2. Então a constante v representa a velocidade de propagação da onda. Como $v > 0$ e $t_2 > t_1$, é necessário que $x_2 < x_1$, ou seja, a onda propaga-se no sentido negativo do eixo dos *xx*.

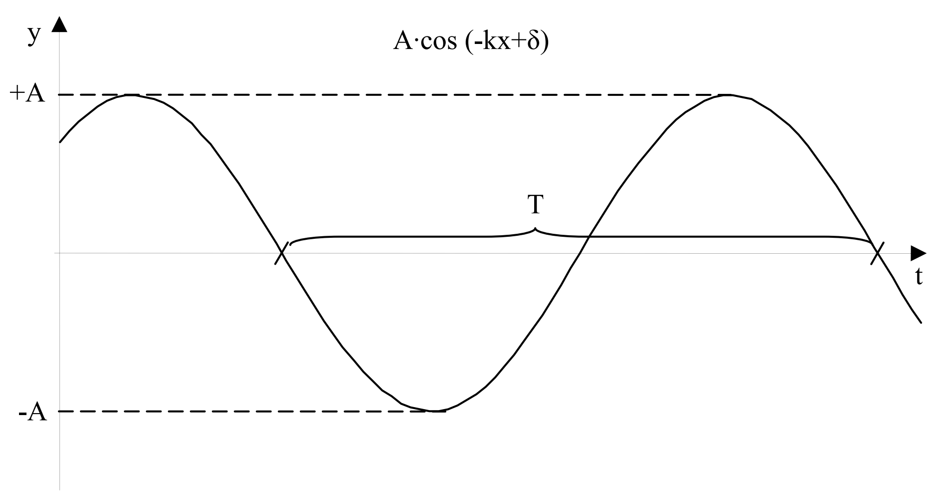
2.3 Onda harmónica

A classe de soluções que se encontrou é muito geral. A solução para o movimento da corda é qualquer função de $x + vt$ (onda regressiva, no sentido negativo do eixo dos *xx*) ou / e $x - vt$ (onda progressiva, no sentido positivo do eixo dos *xx*).
Um resultado extremamente importante do estudo destas funções é o seguinte: qualquer destas possíveis soluções, qualquer onda, pode ser expressa como um integral duplo (em ω e k) de soluções ou ondas elementares, chamadas ondas harmónicas, do tipo

$$y = A\cos(\omega\, t \pm k\, x + \delta)$$

Mais uma vez, A e δ são dependentes das condições iniciais do movimento. São a amplitude e a fase inicial na origem ($t=x=0$).
Esta solução é uma sinusóide agora função do tempo e da distância.

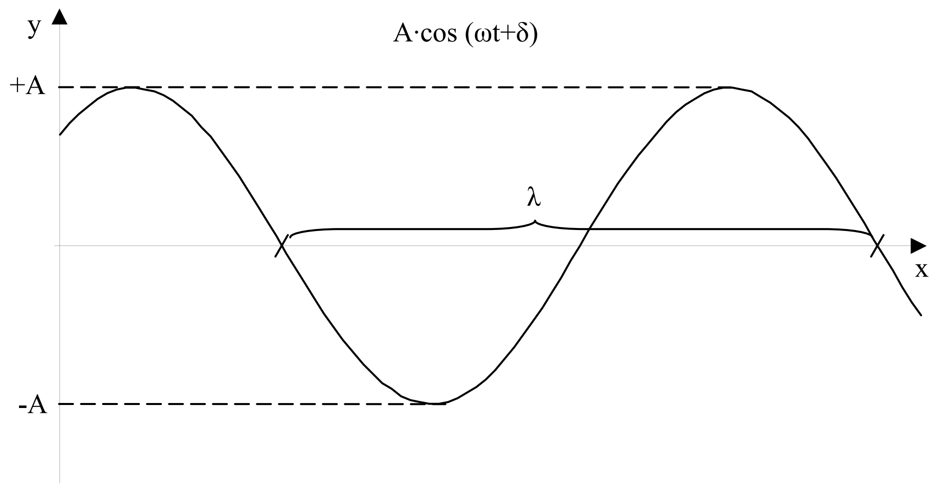
Suponha-se que se fixa num ponto, isto é, faça-se x constante. O que se está a fazer é um filme do que se passa no ponto x. Vem então que a solução é do tipo de solução do movimento harmónico, com fase inicial $-kx + \delta$.



Obviamente, é ainda

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ao contrário, fixe-se, agora, um instante: a solução é agora uma sinusóide função de *x*. Agora está-se a tirar uma fotografia da onda:



A distância entre dois pontos que instantaneamente têm o mesmo valor de onda chama-se comprimento de onda, λ. Na figura está representada a distância entre dois pontos em que o valor é zero. Matematicamente, é, para um mesmo instante *t*, e para o argumento $x - vt$,

$$2\pi + \omega\, t - kx_2 + \delta = \omega\, t - kx_1 + \delta$$

ou

$$k\,(x_2 - x_1) = 2\pi$$

Mas $x_2 - x_1 = \lambda$, donde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

A *k* chama-se número de onda.

Repare-se que a onda harmónica é de facto uma onda, pois pode exprimir-se na forma, por exemplo para o sinal positivo,

$$y = A\cos(\omega t + k\,x + \delta) = A\cos\left[k\left(x + \frac{\omega}{k}t + \frac{\delta}{k}\right)\right]$$

Comparando o argumento $x + \frac{\omega}{k}t$ com o argumento característico da onda $x + vt$, conclui-se que

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Substituindo

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

vem

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

A velocidade da onda harmónica é o comprimento de onda a dividir pelo período, como é evidente.

2.3.1 Sobreposição de ondas harmónicas

O princípio da sobreposição diz que quando duas, ou mais, ondas se propagam num mesmo meio linear, o deslocamento líquido do meio (a onda resultante), em qualquer ponto, é igual à soma algébrica dos deslocamentos de todas as ondas. Aplique-se este princípio a duas ondas harmónicas que se propagam na mesma direcção num mesmo meio. Caso ambas as ondas se propaguem no sentido positivo do eixo dos *xx*, com a mesma frequência, mesmo comprimento de onda e a mesma amplitude, mas com fases diferentes, e caso se exprima cada uma das ondas da seguinte forma:

$$y_1 = A \cdot \text{sen}\,(kx - \omega t) \qquad \text{e} \qquad y_2 = A \cdot \text{sen}\,(kx - \omega t - \phi)$$

então, a onda resultante é

$$y = y_1 + y_2 = y_1 = A \cdot \left[\text{sen}\,(kx - \omega t) + \text{sen}\,(kx - \omega t - \phi)\right]$$

Atendendo ao facto de se ter uma soma de senos e aplicando a respectiva regra, pode-se exprimir *y* da seguinte forma

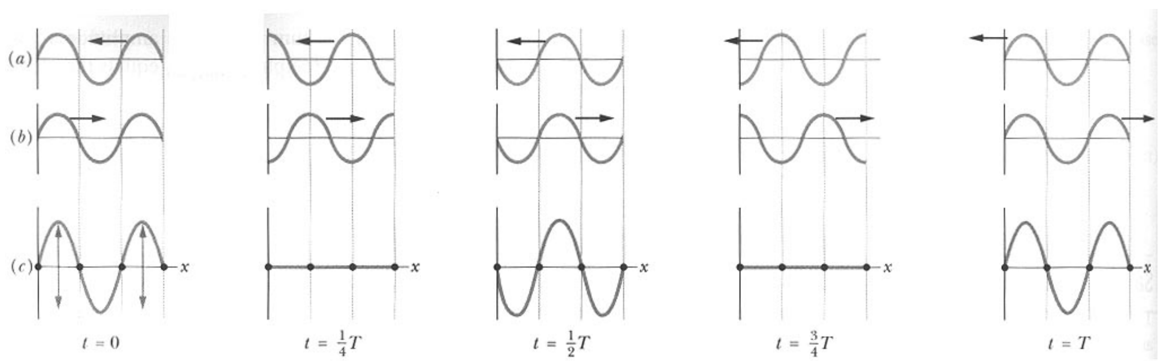
$$y = \left(2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right).$$

Desta equação pode concluir-se que a onda resultante é ainda uma onda harmónica e com a mesma frequência e comprimento de onda das ondas individuais, sendo a amplitude

$2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ e a fase $\frac{\phi}{2}$. Caso a constante de fase for 0, então a amplitude resultante é *2A*, ou seja, as ondas estão em fase e ocorre uma interferência construtiva; esta situação corresponde ao caso em que os máximos e os mínimos das duas ondas individuais ocorrem nas mesmas posições. Se a constante de fase for *π*, então a amplitude da onda resultante será nula, situação em que há uma interferência destrutiva; tal corresponde à situação em que o máximo de uma onda coincide com o mínimo da outra.

2.3.2 Ondas estacionárias

No caso de uma corda elástica em tensão estar fixada em ambas as extremidades, acontece a situação em que as ondas progressivas reflectem-se nas extremidades fixas e provocam ondas que se propagam na corda nos dois sentidos, isto é, a onda incidente e a onda reflectida combinam-se de acordo com o princípio da sobreposição enunciado na secção anterior.
Analisando a situação, chega-se à constatação de que existirão pontos na corda que nunca se moverão, chamados nós, e outros – a meio caminho entre dois nós – pontos em que a amplitude do movimento será máxima, os chamados anti-nós. A situação encontra-se ilustrada na figura seguinte[1]:



Os padrões aqui representados denominam-se ondas estacionárias, pois esses padrões não se deslocam, quer para a esquerda, quer para a direita: os locais onde ocorrem os mínimos e os máximos são sempre os mesmos. Conclusão: sempre que duas ondas sinusoidais com a mesma amplitude e com o mesmo comprimento de onda viajam em direcções opostas ao longo de uma corda esticada, a sua sobreposição origina uma onda estacionária.

A análise de uma onda estacionária faz-se combinando duas ondas harmónicas com as equações descritas na secção anterior. Assim, tem-se

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t) + A \cdot \text{sen}(kx + \omega t)$$

Aplicando algumas regras trigonométricas, a equação anterior fica

[1] Retirada de [11].

$$y(x,t) = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Esta equação não descreve uma onda em movimento, pois não está representada na forma das funções de onda, mas antes uma onda estacionária.
A quantidade *2A*·sen *(k x)* pode ser vista como a amplitude da vibração do elemento da corda que está situado na posição *x*. Contudo, como a amplitude tem de ser sempre um valor positivo e a função seno pode tomar valores negativos, toma-se como amplitude do movimento na posição *x*, o módulo de *2A*·sen *(k x)*.
Ao passo que numa onda móvel a amplitude de vibração é sempre a mesma para todos os pontos, o mesmo já não se passa numa onda estacionária, onde a amplitude de vibração varia de acordo com a posição. Neste caso, a amplitude é nula para os valores de *kx* em que sen *(kx) = 0*. Esses valores são

$$kx = n\pi, \qquad \text{com n} = 0, 1, 2, \ldots$$

Substituindo *k* por *2π/λ* nesta equação, chega-se a

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{com n} = 0, 1, 2, \ldots$$

Estas são as posições de amplitude nula – os nós – para a onda estacionária. De notar que os nós adjacentes estão separados de *λ/2*, metade do comprimento de onda.

Uma análise igual, mas para os pontos de amplitude máxima, pode ser feita. Assim, a amplitude máxima é *2A* e ocorre para valores de *kx* em que sen *(kx) = ±1*. Esses pontos são

$$k\,x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \text{com n} = 0, 1, 2, \ldots$$

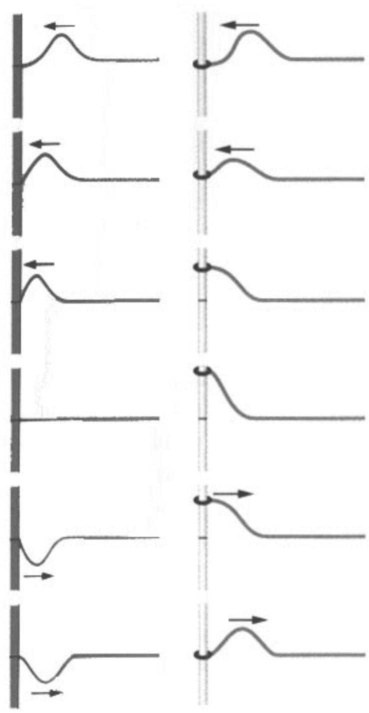
Substituindo *k* por *λ/2*, como no caso anterior, obtém-se

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{com n} = 0, 1, 2, \ldots \text{ (anti-nós)}$$

como as posições em que a amplitude de vibração é máxima (os anti-nós). Os anti-nós estão separados por *λ/2* e situam-se a meio dos pares de nós.

Pode obter-se uma onda estacionária numa corda em tensão permitindo que uma onda móvel seja reflectida na extremidade final da corda de forma a que a onda viaje de volta pela própria corda. Na figura seguinte[2] é usado um único impulso para descrever como ocorrem essas reflexões.

[2] Retirada de [11].

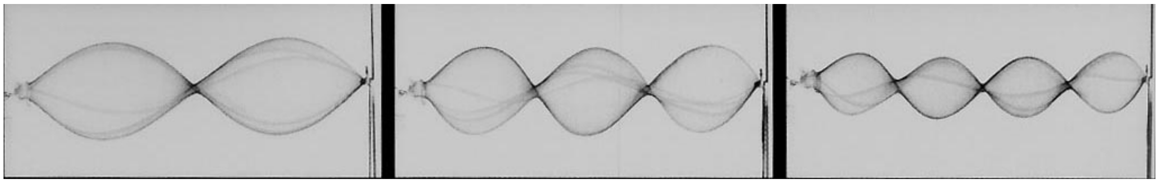


No lado esquerdo da figura, a corda está presa a uma parede, na sua extremidade esquerda. Quando o impulso chega à parede, exerce uma força no sentido ascendente no suporte (a parede). Pela terceira equação de Newton, a parede irá exercer uma força de sentido oposto e de igual amplitude na corda, o que gera um impulso no suporte que irá viajar de volta ao longo da corda no sentido oposto do do impulso incidente. Numa reflexão "dura" deste tipo tem de haver um nó no suporte, pois a corda está presa nesse ponto, pelo que os impulsos incidente e reflectido devem ter sinais opostos de forma a que se cancelem nesse ponto.

No lado direito da figura tem-se uma corda amarrada a um anel que é livre de deslizar sem atrito ao longo de um tubo. Quando o impulso chega, o anel move-se para cima ao longo do tubo, puxando a corda e esticando-a e produzindo um impulso reflectido com a mesma amplitude e com o mesmo sinal do impulso incidente. Assim, numa reflexão "suave" deste tipo, os impulsos incidente e reflectido somam-se criando um anti-nó no extremo da corda: o deslocamento máximo do anel é o dobro de cada um dos impulsos.

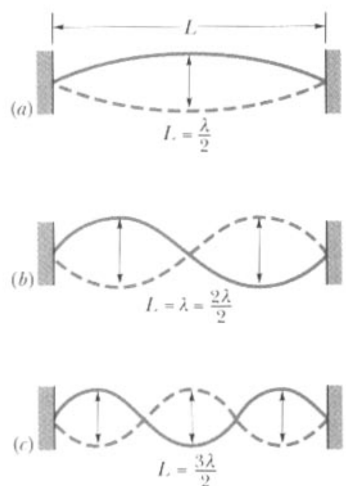
2.3.2.1 Ondas Estacionárias e Ressonância

Considere-se uma corda presa em ambas as suas extremidades (por exemplo, uma corda de uma guitarra). Suponha-se que se envia uma onda sinusoidal contínua com uma dada frequência ao longo da corda num dado sentido, por exemplo, da esquerda para a direita. Quando a onda atingir o extremo direito, reflecte-se e começa a viajar para a esquerda; esta onda no sentido direita-esquerda irá sobrepor-se à onda que viaja no sentido esquerda-direita. Quando atingir o extremo esquerdo irá reflectir-se novamente e começará a viajar para a direita, novamente, sobrepondo-se às ondas que viajam em ambos os sentidos. Resumindo, é fácil de ver que, num curto intervalo de tempo, se irá ter um grande número de ondas que se irão sobrepor umas às outras. Existem certas frequências em que a sobreposição produz um padrão de onda estacionária (ou modo de vibração) com grandes nós e anti-nós, como se pode ver na próxima figura[3]:



Cada uma das ondas estacionárias é produzida em ressonância e a corda está ressonante a estas frequências, denominadas frequências de ressonância. Se a corda vibrar a uma frequência diferente de uma das frequências de ressonância, não se gera uma onda estacionária e a sobreposição de ondas viajando da esquerda para a direita e no sentido oposto produzirá apenas pequenas vibrações da corda.

Para se explicar, matematicamente, a situação descrita, considere-se uma corda presa nas duas extremidades (dois ganchos, por exemplo) que distam entre si L. Note-se que tem de existir um nó em cada uma das extremidades, pois cada uma delas está fixa e não pode vibrar. O padrão mais simples que satisfaz estes requisitos é o demonstrado na figura seguinte[4], alínea a), em que só há dois nós (um em cada extremo da corda) e um único anti-nó situado a meio da corda (forma um padrão de um anel). Neste caso, uma metade do comprimento de onda expande-se ao longo da distância L, pelo que se tem, para este padrão, $\lambda/2 = L$. Esta condição diz que caso as ondas que viajam para a esquerda e para a direita formam este padrão, então o seu comprimento de onda deverá ser $\lambda = 2L$.



No caso da alínea b), tem-se três nós (um em cada extremo e um terceiro nó a meio da corda) e dois anti-nós (diz-se formar um padrão de dois anéis). Para que as ondas que

[3] Retirada de [11].
[4] Retirada de [11].

viajam para a esquerda e para a direita formem este padrão, o seu comprimento de onda terá de ser $\lambda = L$. Um terceiro padrão, ilustrado na alínea c) da figura anterior, com quatro nós, três anti-nós, três anéis requer que o comprimento de onda das ondas que viajam para a esquerda e para a direita seja $\lambda = (2/3)L$. Esta progressão poderia continuar obtendo-se padrões cada vez mais complexos, sendo que, em cada passo da progressão, se aumentaria o comprimento de onda das ondas que viajam para a esquerda e para a direita em $\lambda/2$ a caber na distância L. Assim, uma onda estacionária pode ser gerada numa corda de comprimento L por uma onda cujo comprimento de onda pode ser um dos seguintes valores

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{com n = 1, 2, 3, …}$$

As frequências de ressonância a que correspondem estes comprimentos de onda são:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{com n = 1, 2, 3, …}$$

em que v é a velocidade das ondas móveis na corda. Esta equação diz que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da frequência fundamental, $f = v/(2L)$, que corresponde a $n = 1$. O modo de vibração com essa frequência, mais baixa, é denominado modo fundamental, ou primeiro harmónico. O segundo harmónico é o modo de vibração com $n = 2$, o terceiro corresponde ao modo de vibração com $n = 3$ e assim por diante. As frequências associadas a estes modos são normalmente designadas por f_1, f_2, f_3, etc. O conjunto de todos os modos de vibração possíveis denomina-se série harmónica, e a n chama-se número harmónico do *n-ésimo* harmónico.